$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ alors $(\mathcal{C}_1) \cap (\mathcal{C})$ est le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$

* $(\mathcal{C}_2) \cap (\mathcal{C})$?

$$\begin{cases} f(x) = -e^{-x} \\ x \in [0,2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ x \in [0,2\pi] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

alors $(\mathcal{C}_2) \cap (\mathcal{C})$ est le point d'abscisse $\frac{3\pi}{2}$

b) $g(x) = e^{-x} \Rightarrow g'(x) = -e^{-x}$

$g'(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$; $f'(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$

$f(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}}$ d'où $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_1)$ ont la même tangente en $A(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}})$

* de même pour $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_1)$

3) – a) $f(x) = e^{-x} \cdot \sin x$

$f'(x) = (\cos x - \sin x)\, e^{-x}$

$f''(x) = -2\, e^{-x} \cdot \cos x$

vérifier que : $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$

b) Rq : $f(x) \geq 0$; $\forall x \in [0,\pi]$

$\mathcal{A} = \int_0^{\pi} f(x)dx$

$\mathcal{A} = \int_0^{\pi} (-\frac{1}{2}f'(x) - f'(x))dx$

$\mathcal{A} = [-\frac{1}{2}f'(x) - f(x)]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})$ u.a

$\mathcal{A} = 20\,[\frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})]$ cm^2

$\mathcal{A} = 10\,[(1 + e^{-\pi})]$ cm^2

EXERCICE 11 :

(E) : $y' + 2y = x^2$

1) (E_0) : $y' = -2y$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur IR par : $h(x) = ke^{-2x}$; $k \in IR$

2) $g(x) = ax^2 + bx + c$

$g'(x) = 2ax + b$

$g'(x) + 2g(x) = x^2$

$\Leftrightarrow 2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$

$\Leftrightarrow (2a - 1)x^2 + 2(a + b)x + (b + 2c) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ 2(a + b) = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

d'où $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ est la solution de (E)

3) f solution de (E)

$\Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) = x^2$

$\Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) = g'(x) + 2g(x)$

$\Leftrightarrow (f - g)'(x) + 2(f - g)(x) = 0$

$\Leftrightarrow (f - g)$ est une solution de (E_0)

4) f solution de (E)

$\Leftrightarrow (f - g)$ est une solution de (E_0)

$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = ke^{-2x}$; $k \in IR$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + ke^{-2x}$; $k \in IR$

Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur IR par :

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + ke^{-2x}$; $k \in IR$